ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 381, № 6, с. 748–752

## ИНФОРМАТИКА

УДК 519.8

# ОБ ОДНОМ СООТНОШЕНИИ, СВЯЗАННОМ С ПРОЦЕДУРОЙ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ БОЛЬШИНСТВОМ ГОЛОСОВ

© 2001 г. М. Ю. Хачай

Представлено академиком И.И. Ереминым 16.07.2001 г.

Поступило 30.07.2001 г.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $X$ – произвольное непустое множество и $D_1, D_2, \ldots, D_m \subset X$. Рассмотрим систему включений

$$x \in D_j, \quad j \in \mathbb{N}_m = \{1, 2, \ldots, m\}. \tag{1}$$

Будем говорить, что система совместна и $x^0$ – ее решение, если $x^0 \in \bigcap_{j=1}^{m} D_j$. Один из подходов, применяемых к анализу таких систем в случае их несовместности, основан на идее голосования большинством голосов и связан с рассмотрением так называемых комитетных решений (комитетов) (см., например, [1, 2]). Конечная последовательность $Q = (x^1, x^2, \ldots, x^q)$ называется комитетом большинства из $q$ элементов (или просто комитетом) системы (1), если для каждого $j \in \mathbb{N}_m$ выполнено условие

$$\left|\{i\colon x^i \in D_j\}\right| > \frac{q}{2}.$$

Комитет системы (1) с наименьшим возможным числом элементов называется минимальным. Понятие минимального комитета является естественным дискретным обобщением понятия решения системы ограничений. В самом деле, произвольный минимальный комитет совместной системы (1) состоит из единственного элемента – ее решения. Для несовместной системы число элементов в минимальном комитете при достаточно общих предположениях может рассматриваться в качестве меры ее несовместности.

В работе дается ответ на следующий вопрос: "Пусть система (1) обладает комитетом из $q$ элементов и $k$ –натуральное число, меньшее $q$. Насколько мала по отношению к мощности всей системы может быть мощность ее наибольшей подсистемы, разрешимой комитетом из $k$ элементов?"

*Институт математики и механики*
*Уральского отделения Российской Академии наук, Екатеринбург*

Пусть $Q = (x^1, x^2, \ldots, x^q)$ – комитет системы (1). Сопоставим ему $\{1, -1\}$-матрицу $A$ размера $m \times q$ по правилу

$$a_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{если } x^i \in D_j, \\ -1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Через $a_j$ обозначим $j$-ю строку матрицы. По условию $\sum_{i=1}^{q} a_{ji} \geq 1$ при каждом $j \in \mathbb{N}_m$. Каждому подмножеству $I \subset \mathbb{N}_q$, $|I| = k$, сопоставим:

характеристический вектор $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(I) = \sum_{i \in I} \mathbf{e}_i^q$, где $\mathbf{e}_i^q$ – $i$-й орт пространства $E_q$;

множество $J(I) = \{j\colon (\mathbf{a}_j, \boldsymbol{\tau}(I)) \geq 1\}$;

число $\delta_{q,k}(I, A) = \frac{|J(I)|}{m}$, равное относительной величине мощности подсистемы $J(I)$ системы (1), разрешимой комитетом из $k$ элементов с номерами из множества $I$.

Матрице $A$ сопоставим число

$$\delta_{q,k}(A) = \max\{\delta_{q,k}(I, A)\colon I \subset \mathbb{N}_q, |I| = k\}.$$

Обозначим через $M(q)$ множество всех $\{1, -1\}$-матриц с $q$ столбцами, обладающих свойством $\sum_{i=1}^{q} a_{ji} \geq 1$ для каждого $j$. Рассмотрим антагонистическую игру $\Gamma = (X, Y, K)$ с природой, в которой множество стратегий 1-го игрока $X = \{I \subset \mathbb{N}_q\colon |I| = k\}$, множество стратегий 2-го игрока (природы) $Y = M(q)$, а функция выигрыша $K(I, A) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{q,k}(I, A)$. Для ответа на основной вопрос работы найдем верхнюю цену этой игры

$$\delta_{q,k} = \min_{A \in M(q)} \delta_{q,k}(A) \equiv \min_{A \in M(q)} \max_{I \subset \mathbb{N}_q, |I| = k} \delta_{q,k}(I, A).$$

Воспользуемся стандартными обозначениями: $\binom{n}{i}$ – биномиальный коэффициент; $b(i; n, p) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$ – вероятность биномиального закона [3]; $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ – гауссова плотность; $\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$ – наибольшее (наименьшее) целое число, не превосходящее (не меньшее) заданного вещественного числа $x$. Кроме того, будем говорить, что вещественные последовательности $\xi_n$ и $\eta_n$ эквивалентны, и использовать обозначение $\xi_n \sim \eta_n$, если $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\xi_n}{\eta_n} = 1$.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Положим $s = \left\lceil \frac{q+1}{2} \right\rceil$ и $t = \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil$, каждому подмножеству $S \subset \mathbb{N}_q$, $|S| = s$ сопоставим вектор $\sigma(S) = \sum\limits_{i \in S} e_i^q$. Упорядочим каждое из множеств векторов $\{\boldsymbol{\sigma}(S)\}$ и $\{\boldsymbol{\tau}(I)\}$ лексикографически по убыванию, пронумеровав их элементы натуральными числами $1, 2, \ldots, \binom{q}{s}$ и $1, 2, \ldots, \binom{q}{k}$ соответственно.

Т е о р е м а 1. *Для произвольных натуральных $k < q$ справедливы равенства*

$$\delta_{q,k} = \frac{s}{q} \sum_{l=t-1}^{k-1} \frac{\binom{l}{t-1}\binom{(q-1)-l}{(s-1)-(t-1)}}{\binom{q-1}{s-1}} =$$

$$= \frac{k}{q} \sum_{l=t-1}^{s-1} \frac{\binom{l}{t-1}\binom{(q-1)-l}{(k-1)-(t-1)}}{\binom{q-1}{k-1}}. \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы сводится к анализу подходящей пары взаимно двойственных задач линейного программирования. Зафиксируем матрицу $A \in M(q)$ с $m$ строками. Каждому вектору $\boldsymbol{\sigma}^i$ сопоставим вещественное число $y_i$ по следующему правилу:

1) положим $J_1 \overset{\text{def}}{=} \{j \in \mathbb{N}_m : (\mathbf{a}_j, \boldsymbol{\sigma}^1) = s\}$ и $y_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{|J_1|}{m}$.

2) пусть $y_p$ определено для всех $p \le i < \binom{q}{s}$, тогда

$$J_{i+1} \overset{\text{def}}{=} \left\{ j \in \mathbb{N}_m \setminus \bigcup_{p=1}^{i} J_p : (\mathbf{a}_j, \boldsymbol{\sigma}^{i+1}) = s \right\},$$

$$y_{i+1} \overset{\text{def}}{=} \frac{|J_{i+1}|}{m}.$$

По построению $\mathbf{y} \ge 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{\binom{q}{s}} y_i = 1$, кроме того,

$$\delta_{q,k}(I, A) = \frac{|\{j : (\mathbf{a}_j, \boldsymbol{\tau}(I)) \ge 1\}|}{m} \ge$$

$$\ge \sum \left\{ y_i : i \in \mathbb{N}_{\binom{q}{s}}, (\boldsymbol{\sigma}^i, \boldsymbol{\tau}(I)) \ge t \right\},$$

следовательно, для произвольной матрицы $A \in M(q)$

$$\delta_{q,k}(A) \ge \max_{I \subset \mathbb{N}_q, |I| = k} \sum \left\{ y_i : i \in \mathbb{N}_{\binom{q}{s}}, (\boldsymbol{\sigma}^i, \boldsymbol{\tau}(I)) \ge t \right\}.$$

Оценивая снизу правую часть последнего неравенства, получим одну из упомянутых выше задач:

$$\begin{gathered} \mathrm{L}: \beta = \min v \\ -\sum_{i : (\sigma^i, \tau^j) \ge t} y_i + v \ge 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \binom{q}{k}, \\ \sum_{i=1}^{\binom{q}{s}} y_i = 1, \quad \mathbf{y} \ge 0. \end{gathered} \qquad (3)$$

Сформулируем задачу, двойственную к (3):

$$\begin{gathered} \mathrm{L}^*: \alpha = \max u \\ -\sum_{j : (\sigma^i, \tau^j) \ge t} x_j + u \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \binom{q}{s}, \\ \sum_{j=1}^{\binom{q}{k}} x_j = 1, \quad \mathbf{x} \ge 0. \end{gathered} \qquad (4)$$

В процессе доказательства показываем, что векторы $[\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}]$ и $[\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{v}}]$, определяемые по формулам

$$\bar{x}_j = \frac{1}{\binom{q}{k}}, \quad j = 1, 2, \ldots, \binom{q}{k};$$

$$\bar{y}_i = \frac{1}{\binom{q}{s}}, \quad i = 1, 2, \ldots, \binom{q}{s};$$

$$\bar{u} = \frac{1}{\binom{q}{k}} \sum_{l=t-1}^{s-1} \binom{l}{t-1}\binom{q-1-l}{k-t} =$$

$$= \frac{k}{q} \sum_{l=t-1}^{s-1} \frac{\binom{l}{t-1}\binom{(q-1)-l}{(k-1)-(t-1)}}{\binom{q-1}{k-1}},$$

$$\bar{v} = \frac{1}{\binom{q}{s}} \sum_{l=t-1}^{k-1} \binom{l}{t-1}\binom{q-1-l}{s-t} =$$

$$= \frac{s}{q} \sum_{l=t-1}^{k-1} \frac{\binom{l}{t-1}\binom{(q-1)-l}{(s-1)-(t-1)}}{\binom{q-1}{s-1}},$$

оптимальны в задачах L и L* соответственно, при этом оптимальные значения задач совпадают с $\bar{u} = \bar{v}$.

Из теоремы следуют некоторые известные ранее результаты. Например, видно, что $\delta_{q,1} = \frac{\left\lceil \frac{q+1}{2} \right\rceil}{q}$. Неожиданным следствием является следующее равенство:

$$\delta_{2s-1,\,2s-3} = 0.5\frac{3s-2}{2s-1}.$$

Видно, что $\delta_{2s-1,\,2s-3}$ монотонно возрастает с ростом $s$ и $\lim\limits_{s \to \infty} \delta_{2s-1,\,2s-3} = \frac{3}{4}$.

Замечание. Для произвольных $k < q$, не удовлетворяющих условию $k = 2p - 1$, $q = 2p$ при произвольном натуральном $p$, игра неразрешима в чистых стратегиях, поскольку

$$\max_{I \subset \mathbb{N}_q,\, |I| = k} \; \min_{A \in M(q)} \delta_{q,k}(I, A) = 0.$$

Найдем решение игры в смешанных стратегиях. Для этого убедимся, что игра эквивалентна смешанному расширению подходящей матричной игры. В самом деле, множество чистых стратегий 1-го игрока конечно, а множество смешанных стратегий $\bar{X} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^{\binom{q}{k}} : \sum_{j=1}^{\binom{q}{k}} x_j = 1 \right\}$. Исследуем множество стратегий природы. Исключим из рассмотрения заведомо доминируемые стратегии – матрицы, содержащие хотя бы в одной строке более $\left\lceil \frac{q+1}{2} \right\rceil$ единиц. Далее, воспользовавшись инвариантностью платежной функции по отношению к операциям перестановки строк матрицы и умножению их числа на натуральный множитель, исключим одну из каждой пары эквивалентных чистых стратегий. Без ограничения общности можно полагать, что после этого каждая чистая стратегия природы будет иметь вид матрицы $A$ размера $m \times q$, строки которой определяются по правилу:

$$\mathbf{a}_j = 2\left(\boldsymbol{\sigma}^1 - \frac{1}{2}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, m_1,$$

$$\mathbf{a}_j = 2\left(\boldsymbol{\sigma}^2 - \frac{1}{2}\right), \quad j = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2,$$

$$\mathbf{a}_j = 2\left(\boldsymbol{\sigma}^{\binom{q}{s}} - \frac{1}{2}\right), \quad j = \sum_{i=1}^{\binom{q}{s}-1} m_i + 1, \ldots, \sum_{i=1}^{\binom{q}{s}} m_i,$$

причем числа $m_1, m_2, \ldots, m_{\binom{q}{s}}$ взаимно просты в совокупности и $m_1 + m_2 + \ldots + m_{\binom{q}{s}} = m$. Введя обозначение $y_i = \frac{m_i}{m}$, по аналогии с с доказательством теоремы 1 сопоставим матрице $A$ неотрицательный рациональный вектор $y$, координаты которого удовлетворяют условию нормировки. Нетрудно убедиться, что построенное отображение биективно. Другими словами, множество чистых стратегий природы с точностью до изоморфизма совпадает с множеством $Y = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{Q}_+^{\binom{q}{s}} : \sum_{i=1}^{\binom{q}{s}} y_i = 1 \right\}$, а множество смешанных $\bar{Y}$ состоит из дискретных вероятностных мер, определенных на множестве всех подмножеств $Y$. Обозначим через $A(y)$ матрицу, соответствующую вектору $\mathbf{y}$, а через $Y'$ – множество единичных ортов $E_{\binom{q}{s}}$. Поскольку $\delta_{q,k}(I_j, A(y)) = \sum_{i:\, (\sigma^i, \tau^j) \geq t} y_i$, чистая стратегия $A(\mathbf{y})$ эквивалентна смешанной $\mu_{\mathbf{y}}$, определяемой равенствами $\mu_{\mathbf{y}}\left(e_i^{\binom{q}{s}}\right) = y_i, i \in \mathbb{N}_{\binom{q}{s}}$, следовательно, при решении игры в смешанных стратегиях можно ограничиться подмножеством мер, заданных над $Y'$, т.е

$$\bar{Y}' = \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^{\binom{q}{s}} : \sum_{j=1}^{\binom{q}{s}} y_j = 1 \right\}.$$

Преобразованная игра является смешанным расширением матричной игры, которой соответствуют задачи линейного программирования (3) и (4). Нами доказана

Теорема 2. *Игра* $\Gamma$ *разрешима в смешанных стратегиях. Оптимальными смешанными стра-*

*тегиями игроков являются соответственно меры* $\bar{x}$ *и* $\bar{\mu}$, *где*

$$\bar{x}_j = \binom{q}{k}^{-1}, \quad j \in \mathbb{N}_{\binom{q}{k}}; \quad \bar{\mu}\left(e_i^{\binom{q}{s}}\right) = \binom{q}{s}^{-1}, \quad i \in \mathbb{N}_{\binom{q}{s}}.$$

*Цена игры совпадает с* $\delta_{q,k}$ *и определяется по формуле* (2).

Заметим, что оптимальная стратегия природы не зависит от $k$ и определяется неоднозначно. Например, матрица $A(q)$ размера $\binom{q}{s} \times q$, в которой $\mathbf{a}_j = 2(\boldsymbol{\sigma}^j - 0.5)$, является оптимальной чистой стратегией.

Найдем приближенные формулы для вычисления $\delta_{q,k}$ при больших $q$ и добавочном условии на выбор $k$: $k = q - n$, где $n$ – фиксированное натуральное число.

Теорема 3. 1. *Пусть* $n = 2p$, *где* $p \in \mathbb{N}$; *справедливо равенство*

$$\lim_{q \to \infty} \delta_{q,\, q-2p} = \frac{1}{2}\left(1 + b\left(p;\, 2p-1, \frac{1}{2}\right)\right). \tag{5}$$

2. *Если* $n = 2p - 1$, *то* $\lim\limits_{q \to \infty} \delta_{q,\, q-n}$ *не существует, поскольку*

$$\lim_{s \to \infty} \delta_{2s,\, 2(s-p)+1} = \frac{1}{2} + b\left(p;\, 2p-1, \frac{1}{2}\right) \tag{6}$$

*и*

$$\lim_{s \to \infty} \delta_{2s-1,\, 2(s-p)} = \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Доказательства обоих утверждений проводятся прямым вычислением пределов.

Следствие 1. *Для произвольного нечетного* $k$

$$\lim_{q \to \infty} \delta_{q,k} = \frac{1}{2} + 0.$$

Воспользовавшись локальной предельной теоремой Муавра–Лапласа, сформулируем.

Следствие 2. *Пределы* (5) *и* (6) *как функции аргумента* $p$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{q \to \infty} \delta_{q,\, q-2p} \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2p-1}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2p-1}}\right),$$

$$\lim_{s \to \infty} \delta_{2s,\, 2(s-p)+1} \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{2p-1}}\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2p-1}}\right).$$

Известно, что нормальное приближение для старшей вероятности биномиального закона имеет высокую точность даже при не слишком больших $p$, что, в частности, подтверждают приведенные здесь данные:

| $p$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{q \to \infty} \delta_{q,\, q-2p}$ | 0.750 | 0.688 | 0.656 | 0.637 | 0.623 | 0.613 | 0.605 | 0.598 | 0.593 | 0.588 |
| Нормальное приближение | 0.742 | 0.695 | 0.661 | 0.640 | 0.626 | 0.615 | 0.606 | 0.600 | 0.594 | 0.589 |
| $\lim\limits_{s \to \infty} \delta_{2s,\, 2(s-p)+1}$ | 1.000 | 0.875 | 0.812 | 0.773 | 0.746 | 0.726 | 0.709 | 0.696 | 0.685 | 0.676 |
| Нормальное приближение | 0.984 | 0.891 | 0.823 | 0.781 | 0.752 | 0.730 | 0.713 | 0.699 | 0.688 | 0.678 |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Теорема 1 содержит серию новых необходимых условий существования комитета системы (1).

2. Теорема 3 может рассматриваться вне контекста теории комитетных решений как аналог предельной теоремы, так как в ней указываются асимптотические формулы для сумм вероятностей гипергеометрических законов распределения.

3. Особый интерес вызывают следствия. Исходя из здравого смысла, следовало бы, например, ожидать, что $\delta_{q,\, q-2} \xrightarrow{q \to \infty} 1$. Однако это не так. Этот факт удобно интерпретировать в терминах “голосования” и “кворума”. В самом деле, пусть некоторая комиссия из $q$ депутатов принимает или отклоняет законопроекты методом голосования простым большинством голосов. Допустим, известно, что на очередной рабочий день было запланировано рассмотреть $m$ законопроектов.

Известно, что если на заседание явилась бы вся комиссия целиком, то все законопроекты были бы приняты. Из доказанного выше следует, что если хотя бы двое депутатов будут отсутствовать, то в худшем случае комиссия примет не более 75% законопроектов при условии, что все оставшиеся ее члены не изменят своего решения и будут голосовать так, как они голосовали бы при полном ее составе.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 00–15–96041 и 01–01–00563.)

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мазуров Вл.Д.* Комитеты в задачах оптимизации и классификации. М.: Наука, 1990. 248 с.
2. *Мазуров Вл.Д., Хачай М.Ю.* // Изв. Урал. гос. ун-та, 1999. В. 14. С. 77–108.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир. 1964. Т. 1. 498 с.