УДК 519.8

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ И АППРОКСИМАЦИОННОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ О МИНИМАЛЬНОМ АФФИННОМ РАЗДЕЛЯЮЩЕМ КОМИТЕТЕ

М.Ю.Хачай

Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской,16, г. Екатеринбург, Россия, 620219
e-mail: *mkhachay@imm.uran.ru*

Abstract

Two combinatorial problems, Three-elements affine separating committee (3-ASC) and Minimal affine separating committee (MASC), which are closely connected with a training problem in the special case of perceptrons, are considered. It is proven that the former problem is NP-complete and the later is NP-hard and does not belong to Apx. Also some approximation algorithm for the MASC problem is discussed.

Аннотация

Рассматриваются две комбинаторных задачи, связанные с обучением распознаванию образов: задача проверки существования аффинного разделяющего комитета из 3-х элементов (3-ASC) и задача о минимальном по числу элементов аффинном разделяющем комитете (MASC). Показано, что задача 3-ASC NP-полна, а задача MASC NP-трудна и не принадлежит классу Apx. Обсуждается новый приближенный алгоритм для задачи MASC.

Введение

Вычислительная сложность задачи обучения оптимальной по тому или иному критерию нейронной сети интересует исследователей с конца 80-х гг. прошлого столетия. Особый интерес вызывают результаты, касающиеся оценок вычислительной сложности задачи обучения простейших сетей — классических персептронов, представляющих собой 2-слойную сеть без скрытых слоев с q входными нейронами и одним выходным. Функция активации i-го нейрона имеет классическую форму:

$$f^i(a) = \begin{cases} 1, & (\beta^i, a) + \gamma^i > 0, \\ -1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, персептрон реализует решающее правило

$$F(z \,|\, (\beta^1, \gamma^1), \ldots, (\beta^{q+1}, \gamma^{q+1})) : \mathbb{Q}^n \to \{-1, 1\}.$$

Задавшись выборкой $(a_1, a_2, \ldots, a_{m_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{m_2})$, в которой $a_i \in A$, $b_j \in B$, и конечные множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$ составлены из представителей, соответственно, 1-го и 2-го классов, можно поставить задачу обучения персептрона, т.е. подбора значений параметров β и γ так, чтобы

$$\begin{aligned} F(a_i) &= \quad 1 \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, m_1\} = \mathbb{N}_{m_1}) \\ F(b_j) &= \ -1 \qquad (j \in \mathbb{N}_{m_2}). \end{aligned}$$

"Обученный" персептрон, параметры которого настроены в результате успешного решения задачи обучения, принято называть *корректным.* С процедурой обучения связаны постановки двух комбинаторных задач.

ЗАДАЧА "ОБУЧАЕМОСТЬ" [1]
Заданы натуральное число q и выборка $(a_1, a_2, \ldots, a_{m_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{m_2})$. Существует ли корректный персептрон с не более чем q входными нейронами?

ЗАДАЧА "ОПТИМАЛЬНЫЙ КОРРЕКТНЫЙ ПЕРСЕПТРОН" [2]
Задана выборка $(a_1, a_2, \ldots, a_{m_1}, b_1, b_2, \ldots, b_{m_2})$. Требуется определить параметры корректного персептрона с наименьшим возможным числом q.

Известно [3], что задача ОБУЧАЕМОСТЬ в общем случае NP-полна и остается такой при $q = 2$ (в то время как при $q = 1$ задача полиномиально разрешима), а задача ОПТИМАЛЬНЫЙ КОРРЕКТНЫЙ ПЕРСЕПТРОН NP-трудна [2]. Доказательство труднорешаемости обеих задач было в свое время получено в качестве следствия теоремы об NP-полноте задачи "Quadrant" [3]. Известны [2] аналогичные результаты, обосновывающие труднорешаемость задач обучения нейронных сетей с более сложной архитектурой, также опирающиеся на этот результат.

В данной работе показывается, что задача обучения персептрона остается труднорешаемой даже при наложении достаточно сильных дополнительных ограничений на его архитектуру. Рассматривается задача обучения в классе персептронов, у которых q — нечетно, а параметры выходного нейрона — фиксированы: $\beta = [1, 1, \ldots, 1]^T$ и $\gamma = 0$, что соответствует голосованию согласно правилу простого большинства. Вопросы обучения таких сетей удобно формулировать в терминах т.н. *аффинных разделяющих комитетов* и *комитетных решений* подходящих систем линейных неравенств.

Определение 1. [4] Аффинным разделяющим комитетом для множеств $A, B \subset \mathbb{Q}^n$ называется конечная последовательность $Q = (f^1, \ldots, f^q)$ функций $f^i(z) = \text{sign}((\beta^i, z) + \gamma^i))$ такая, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{q} f^i(a) &\geq 1, \quad\ \ (a \in A) \\ \sum_{i=1}^{q} f^i(b) &\leq -1, \quad (b \in B). \end{aligned}$$

Понятие аффинного разделяющего комитета тесно связано с понятием комитетного решения системы линейных неравенств.

Определение 2. [5] Последовательность $Q' = (x^1, \ldots, x^q)$, $x^i \in \mathbb{Q}^n$ называется комитетным решением системы неравенств

$$(a_j, x) > b_j \quad (i \in \mathbb{N}_m), \tag{1}$$

если справедливо условие

$$\left|\{i \in \mathbb{N}_q \mid (a_j, x^i) > b_j\}\right| > \frac{q}{2} \quad (j \in \mathbb{N}_m).$$

Видно, что последовательность $Q = (f^1, \ldots, f^q)$ является аффинным разделяющим комитетом множеств A и B тогда и только тогда, когда последовательность $Q' = ((\beta^1, \gamma^1), \ldots, (\beta^q, \gamma^q))$ является комитетным решением системы неравенств

$$\begin{cases} (\beta, a) + \gamma > 0 & (a \in A) \\ (\beta, b) + \gamma < 0 & (b \in B). \end{cases}$$

и определяет веса входного слоя соответствующего корректного персептрона. Известно [6], что задача MCLE поиска комитетного решения системы (1) с наименьшим возможным числом элементов (минимального комитета) NP-трудна

Ниже показывается, что

- задача проверки, существует ли для заданных множеств A и B аффинный разделяющий комитет из 3-х элементов (3-ASC) NP-полна;
- задача построения минимального по числу элементов аффинного разделяющего комитета для множеств A и B (MASC) NP-трудна и не принадлежит классу Apx.

Завершает работу обсуждение приближенного полиномиального алгоритма для задачи MASC.

1. Аффинный разделяющий комитет из трех элементов

Рассмотрим следующую комбинаторную задачу.

ЗАДАЧА "АФФИННЫЙ РАЗДЕЛЯЮЩИЙ КОМИТЕТ ИЗ 3-Х ЭЛЕМЕНТОВ" (3-ASC) Заданы множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2})$. Существует ли аффинный разделяющий комитет из 3-х элементов для этих множеств?

Теорема 1. *Задача* 3-*ASC* NP-*полна*

Доказательство.

1. Задача 3-ASC, очевидно, принадлежит классу NP, поскольку проверка того, что заданная последовательность функций $Q = (f^1, f^2, f^3)$ является аффинным разделяющим комитетом множеств A и B может быть произведена за полиномиальное время от размера записи условия задачи.

2. Для обоснования NP-полноты докажем полиномиальную сводимость к задаче 3-ASC известной NP-полной задачи о раскраске графа в 3 цвета (3-COLORABILITY).

ЗАДАЧА "РАСКРАСКА ГРАФА В 3 ЦВЕТА" (3-COLORABILITY)
Задан конечный граф $G = (V, E)$. Раскрашиваем ли он в 3 цвета, другими словами, существует ли функция $\varphi : V \to \{1, 2, 3\}$ такая, что для произвольных $u, v \in V$, $(\{u, v\} \in E) \;\Rightarrow\; (\varphi(u) \neq \varphi(v))$?

В самом деле, пусть задан граф $G = (V, E)$, определяющий условие задачи 3-COLORABILITY. Без ограничения общности, можем полагать, что $V = \mathbb{N}_n$. Сопоставим графу G множества A и B в $\mathbb{Q}^n$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &A = \{2e^i\}_{i=1}^n, && \text{где } e^i_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \\ &B = \{e^i + e^j \mid \{i, j\} \in E\} && \end{aligned} \tag{2}$$

и покажем, что графа раскрашиваем в 3 цвета тогда и только тогда, когда для множеств A и B существует аффинный разделяющий комитет из 3-х элементов, т.е. найдутся пары $(x^1, y^1), (x^2, y^2)$ и (x^3, y^3) такие, что последовательность $Q = ((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3))$ — комитетное решение системы неравенств

$$\begin{cases} 2x_i + y & < 0 \quad (i \in V) \\ x_i + x_j + y & > 0 \quad (\{i, j\} \in E). \end{cases} \tag{3}$$

Пусть разбиение $V_1 \dot\cup V_2 \dot\cup V_3$ задает раскраску графа G в три цвета. Легко проверить, что последовательность $((x^1, 0), (x^2, 0), (x^3, 0))$, в которой

$$x^i_k = \begin{cases} 2, & k \in V_i \\ -1, & k \notin V_i \end{cases} \qquad (i \in \mathbb{N}_3)$$

является комитетным решением системы (3).

С другой стороны, пусть $Q = ((x^1, y^1), (x^2, y^2), (x^3, y^3))$ — произвольное комитетное решение системы (3). Введем обозначения:

$$V_k = \{i \in V \mid 2x^p_i + y^p < 0 \ (p \in \mathbb{N}_3 \setminus \{k\})\} \quad (k \in \mathbb{N}_3).$$

Так как Q — комитетное решение системы (3), справедливо равенство $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$. Без ограничения общности, можем полагать, что $V_k \neq \emptyset$ и $V_{k_1} \cap V_{k_2} = \emptyset$ для произвольных k и $k_1 \neq k_2$ из $\mathbb{N}_3$. Построенное разбиение задает искомую раскраску графа G. В самом деле, допустим, от противного, что ребро $\{i, j\} \subset V_1$ (случаи с V_2 и V_3 могут быть рассмотрены по аналогии). По построению множества V_1, справедливы неравенства

$$2x_i^2 + y^2 < 0, \quad 2x_i^3 + y^3 < 0,$$
$$2x_j^2 + y^2 < 0, \quad 2x_j^3 + y^3 < 0,$$

следовательно, и

$$x_i^2 + x_j^2 + y^2 < 0 \quad \text{и} \quad x_i^3 + x_j^3 + y^3 < 0,$$

в то время как с необходимостью, в силу того, что Q комитетное решение системы (3), справедливо хотя одно из неравенств:

$$x_i^2 + x_j^2 + y^2 > 0 \quad \text{или} \quad x_i^3 + x_j^3 + y^3 > 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Замечание 1. Нетрудно убедиться в том, что задача 3-ASC остается NP-полной, если ограничиться рассмотрением множеств $A \cup B \subset \{z \in \{0,1,2\}^n \,:\, |z| \leq 2\}$.

2. Задача о минимальном аффинном разделяющем комитете

Перейдем к рассмотрению задачи об обучении в классе аффинных разделяющих комитетов, заданную в оптимизационной постановке.

ЗАДАЧА "МИНИМАЛЬНЫЙ ПО ЧИСЛУ ЭЛЕМЕНТОВ АФФИННЫЙ РАЗДЕЛЯЮЩИЙ КОМИТЕТ" (MASC)
Заданы множества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2})$, причем $A \cap B = \emptyset$. Требуется построить аффинный разделяющий комитет для множеств A и B с наименьшим числом элементов.

Теорема 2. *Задача MASC NP-трудна.*

Доказательство. Справедливость утверждения теоремы следует из теоремы 1 ввиду легко проверяемой полиномиальной сводимости (по Тьюрингу) задачи 3-ASC к задаче MASC. □

Традиционный подход к исследованию NP-трудных задач предполагает рассмотрение полиномиально разрешимых подклассов NP-трудной задачи, анализ аппроксимационный свойств задачи и разработку приближенных алгоритмов.

Как обычно, приближенным алгоритмом (с точностью аппроксимации r) для задачи комбинаторной минимизации назовем алгоритм, позволяющий для каждой ее конкретной постановки

$$f^* = \min\{f(x) \,|\, x \in M\}$$

за полиномиальное время находить допустимое решение $x_{app} \in M$ с условием

$$\frac{f(x_{app})}{f^*} \le r.$$

Класс Apx составляют задачи комбинаторной оптимизации, обладающие приближенным алгоритмом с фиксированной точностью r. Многие NP-трудные задачи, например, задача коммивояжера (TSP), принадлежат этому классу. К сожалению, известны и примеры задач, не принадлежащих этому классу. Вероятно, наиболее известной среди таких задач является задача о наибольшей клике (CLIQUE), для которой показано [7], что для произвольного $\varepsilon > 0$ не существует полиномиального приближенного алгоритма с точностью аппроксимации $n^{1-\varepsilon}$. Убедимся, что описанная выше задача MASC также не может быть решена приближенно ни с какой фиксированной точностью.

Теорема 3. *Задача MASC не принадлежит классу Apx.*

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу комбинаторной оптимизации

ЗАДАЧА "РАСКРАСКА 3-ОДНОРОДНОГО 2-ЦВЕТНОГО ГИПЕРГРАФА В k ЦВЕТОВ" (3-UHC)

Заданы конечный однородный гиперграф $\Gamma = (V, H)$, $|h| = 3, h \in H$ и натуральное число $k \ge 3$. Известно, что Γ раскрашиваем в 2 цвета. Требуется указать раскраску гиперграфа Γ в k цветов, т.е. такую функцию $\varphi : V \to \mathbb{N}_k$, что

$$(\{u, v, w\} \in H) \Rightarrow (|\{\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)\}| > 1).$$

Известно [8], что задача 3-UHC NP-трудна, и остается NP-трудной при произвольном фиксированном $k \ge 3$. Покажем, что задача 3-UHC при $k = \binom{2s+1}{s+1}$ для произвольного натурального s сводится по Тьюрингу к задаче поиска аффинного разделяющего комитета из $2s + 1$ элемента для подходящих множеств. В самом деле, пусть заданы однородный гиперграф $\Gamma = (V, H)$, в котором $V = \mathbb{N}_n, H \ne \emptyset$ и $|h| = 3$ для каждого ребра $h \in H$ и число $s \in \mathbb{N}$. Пусть разбиение $V_1 \dot\cup V_2 = V$ определяет раскраску Γ в 2 цвета. Требуется указать раскраску Γ в $\binom{2s+1}{s+1}$ цветов. Аналогично доказательству теоремы 1, сопоставим гиперграфу Γ такие подмножества $A, B \subset \mathbb{Q}^n$, что

$$\begin{aligned} A &= \{3e^i\}_{i=1}^n, && \text{где } e^i_j = \delta_{ij}, \\ B &= \{e^i + e^j + e^k \mid \{i, j, k\} \in H\} \end{aligned}$$

и систему неравенств

$$\begin{cases} 3x_i + y & < 0 \quad (i \in V) \\ x_i + x_j + x_k + y & > 0 \quad (\{i, j, k\} \in H). \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, эти построения могут быть проведены за полиномиальное время от размера записи Г. Убедимся в справедливости следующих предложений.

a). Система (4) несовместна и обладает комитетным решением из 3-х элементов.

b). Произвольное комитетное решение $Q = ((x^1, y^1), \ldots, (x^{2s+1}, y^{2s+1}))$ системы (4) индуцирует раскраску гиперграфа Г в $\binom{2s+1}{s+1}$ цветов.

a). Поскольку $H \neq \emptyset$, система (4) несовместна, по теореме Карвера. Далее, нетрудно убедиться, что последовательность $((x^1, 0), (x^2, 0), (x^3, 0))$, в которой

$$x_i^1 = \begin{cases} -1, & i \in V_1 \\ 3, & i \in V_2 \end{cases}, \quad x_i^2 = \begin{cases} 3, & i \in V_1 \\ -1, & i \in V_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad x^3 = [-1, -1, \ldots, -1]^T,$$

является ее комитетным решением. В самом деле, неравенству $3x_i + y < 0$ при произвольном $i \in V_1$ (случаи V_2 и V_3 могут быть рассмотрены по аналогии) удовлетворяют $(x^1, 0)$ и $(x^3, 0)$, а произвольному неравенству $x_i + x_j + x_k + y > 0$ удовлетворяют $(x^1, 0)$ и $(x^2, 0)$.

b). Пусть $Q = (((x^1, y^1), \ldots, (x^{2s+1}, y^{2s+1}))$ — комитетное решение системы (4). Каждому подмножеству $P \subset \mathbb{N}_{2s+1}$, $|P| = s + 1$ сопоставим множество

$$V_P = \{i \in V \mid 3x_i^p + y^p < 0 \ (p \in P)\}.$$

Через $\mathcal{P}$ обозначим множество $\{P \subset \mathbb{N}_{2s+1} \mid |P| = 2s + 1\}$. По построению, $|\mathcal{P}| = \binom{2s+1}{s+1}$ и $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} V_P = V$. Без ограничения общности, полагаем, что $V_P \neq \emptyset$ для каждого $P \in \mathcal{P}$ и $(P_1 \neq P_2) \Rightarrow (V_{P_1} \cap V_{P_2} = \emptyset)$. Разбиение

$$V_{P_1} \dot{\cup} V_{P_2} \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_{P_{\binom{2s+1}{s+1}}} = V$$

задает искомую раскраску гиперграфа Г. В самом деле, предположим, от противного, что ребро $\{i, j, k\} \subset V_P$ для некоторого $P \in \mathcal{P}$. По выбору ребра, справедливы неравенства:

$$\begin{cases} 3x_i^p + y^p < 0 \\ 3x_j^p + y^p < 0 \qquad (p \in P), \\ 3x_k^p + y^p < 0 \end{cases}$$

следовательно,

$$x_i^p + x_j^p + x_k^p + y^p < 0 \quad (p \in P).$$

С другой стороны, поскольку Q — комитетное решение системы (4), с необходимостью найдется номер $p_0 \in P$ такой, что $x_i^{p_0} + x_j^{p_0} + x_k^{p_0} + y^{p_0} > 0$. Найденное противоречие подтверждает корректность раскраски.

Предположим, от противного, что задача MASC принадлежит классу Apx, и существует полиномиальный приближенный алгоритм с фиксированной оценкой точности r. Тогда, учитывая п. a), алгоритм построит комитетное решение системы (4), соответствующей гиперграфу Γ, состоящее из $2s+1$ элемента, где $2s+1 \le 3r$, указав тем самым (согласно п. b)) раскраску гиперграфа в $\binom{2s+1}{s+1}$ цветов. Найденное противоречие завершает доказательство теоремы. $\square$

3. Приближенный алгоритм для задачи MASC

Рассмотрим следующий приближенный полиномиальный алгоритм для задачи о минимальном аффинном разделяющем комитете (MASC). Согласно проведенным выше рассуждениям, для того, чтобы построить для обучающих множеств $A = \{a_1, \ldots, a_{m_1}\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_{m_2}\}$ аффинный разделяющий комитет необходимо и достаточно найти комитетное решение системы линейных неравенств

$$\begin{cases} (a_i, x) + y & > 0 \quad (i \in \mathbb{N}_{m_1}) \\ (-b_j, x) - y & > 0 \quad (j \in \mathbb{N}_{m_2}) \end{cases}$$

или (в более краткой форме)

$$(c_k, z) > 0 \quad (k \in \mathbb{N}_m). \tag{5}$$

Введем некоторые дополнительные ограничения на систему (5)

1). $m > n+1 > 2$, и каждая подсистема из $n+1$ неравенства совместна;
2). $|c_k| = 1$ для каждого $k \in \mathbb{N}_m$;
3). $m = 2t + n$ для некоторого натурального t.

Последнее ограничение не является принципиальным и введено только для удобства дальнейших построений. Сопоставим вектору $z \in \mathbb{Q}^{n+1}$ следующие конечные множества:

$$\begin{aligned} K_>(z) &= \{k \in \mathbb{N}_m \,:\, (c_k, z) > 0\}, \\ K_<(z) &= \{k \in \mathbb{N}_m \,:\, (c_k, z) < 0\}, \\ K_=(z) &= \{k \in \mathbb{N}_m \,:\, (c_k, z) = 0\}. \end{aligned}$$

Алгоритм.
Шаг 1. Найти произвольное нетривиальное решение ζ^1 подсистемы

$$(c_k, z) = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}_n)$$

и множества $K_>(\zeta^1), K_<(\zeta^1)$ и $K_=(\zeta^1)$. В качестве z^1 выбрать произвольное решение подсистемы K_1 системы (5), где

$$K_1 = \begin{cases} K_>(\zeta^1) \cup K_=(\zeta^1), & \text{if } |K_>(\zeta^1)| \ge |K_<(\zeta^1)|, \\ K_<(\zeta^1) \cup K_=(\zeta^1), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положить $K = \mathbb{N}_m \setminus K_1$ и $i = 1$.
Шаг 2. Если $K = \emptyset$, завершить процедуру, последовательность $(z^1, z^2, \ldots, z^i)$ — искомое комитетное решение системы (5).
Шаг 3. Выбрать произвольное подмножество

$$L' \subseteq K \ : \quad |L'| = \min\{|K|, n\},$$

найти нетривиальное решение подсистемы

$$(c_k, z) = 0 \qquad (k \in L').$$

Положить $L = K_=(\zeta^{i+1})$ и найти решения z^{i+1}, z^{i+2} подсистем системы (5) с индексами $K_>(\zeta^{i+1}) \cup L$ и $K_<(\zeta^{i+1}) \cup L$, соответственно.
Шаг 4. Переопределить $K = K \setminus L$, $i = i + 2$ и вернуться на Шаг 2.

Договоримся называть итерацией приведенного выше алгоритма последовательность шагов 2–4 (при этом первая итерация включает также Шаг 1) и сформулируем теорему, доказательство которой приведено в [9]

Теорема 4.
1. Описанный выше алгоритм корректен и имеет не более чем

$$\left\lceil \frac{t}{n} \right\rceil$$

итераций.
2. Пусть мощность наибольшей по числу неравенств максимальной совместной подсистемы системы (5) *не превосходит числа* $t + n + p$ *для некоторого натурального* p*. Тогда точность* r *аппроксимации алгоритма удовлетворяет соотношению*

$$1 \leq r \leq \frac{2\lceil \frac{t}{n} \rceil + 1}{2\lceil \frac{t-p}{2p+n} \rceil + 1} \approx 1 + \frac{2p}{n}.$$

Замечание 2. Если система (5) равномерно распределена по Гейлу [10], то алгоритм найдет ее минимальное комитетное решение, т.е. задача MASC при этом условии полиномиально разрешима.

Заключение

В работе обоснована трудноршаемость двух комбинаторных задач, 3-ASC и MASC, тесно связанных с задачей линейного дискриминантного анализа. Показано, что задача 3-ASC NP-полна, а задача MASC NP-трудна и не принадлежит классу Apx. Далее, предложен приближенный полиномиальный алгоритм решения задачи MASC, указаны оценки его точности и вычислительной сложности, а также подкласс задачи MASC, для которого он является точным. Интерес вызывает исследование вычислительной сложности задач при фиксированной размерности n. Известно, что при этом предположении задача

3-ASC становится полиномиально разрешимой. Вопрос же оценки вычислительной сложности (и порога эффективной аппроксимируемости) задачи MASC в настоящее время остается открытым.

Работа выполнена при поддержке грантов Президента РФ НШ-5595.2006.1 и МД-6768.2006.1 и РФФИ 04-01-00108-а.

Список литературы

[1] Judd J.S. *Neural Network Design and Complexity of Learning.* - MIT Press, 1990.

[2] Lin J.H., Vitter J.S. Complexity Results on Learning by Neural Nets // *Machine Learning.* 1991, vol 6., pp. 211-230.

[3] Blum A.L., Rivest R.L. Training a 3-node Neural Network is NP-complete // *Neural Networks.* 1992, vol.5, pp. 117–127.

[4] Мазуров Вл.Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания // *Кибернетика.* 1971. №3. С. 140–146.

[5] Ablow C.M., Kaylor D.J. Inconsistent Homogeneous Linear Inequalities // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 71, no. 5, p. 724.

[6] Khachai M.Yu. Computational complexity of the Minimum committee problem and related problems // *Doklady Mathematics.* 2006, Vol. 73, no. 1, pp. 138–141.

[7] Hastad J. Clique is hard to approximate within $n^{1-\varepsilon}$ // *Acta Mathematica.* Vol. 182, 1999, 105–142. 13

[8] Dinur I., Regev O. and Smyth C. The hardness of 3-uniform hypergraph coloring. In: *Proc. of the 43rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, November 2002.*

[9] Khachay M.Yu. On Approximate Algorithm of a Minimal Committee of a Linear Inequalities System// *Pattern Recognition and Image Analysis.* 2003, vol. 13, no 3. pp. 459–464.

[10] Gale D. Neighboring vertices on a convex polyhedron. In: *Linear inequalities and related systems*, edited by H.W.Kuhn and A.W.Tucker, Princeton, 1956 pp. 255–263.